Métodos Matemáticos I
Propiedades locales de las funciones holomorfas

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 11, 2012

En este capítulo vamos a ver que en algunos aspectos las funciones holomorfas se comportan localmente de forma parecida a las funciones polinómicas. Ello se debe, naturalmente, a que las funciones holomorfas son analíticas y, por tanto, localmente, son límites uniformes de sucesiones de funciones polinómicas (sus polinomios de Taylor).

Es sabido que una función polinómica $p(z)$ tiene un cero de orden k en un punto $a \in \mathbb{C}$, si dicha función y todas sus derivadas, hasta la de orden $k-1$ inclusive, se anulan en a y la derivada de orden k no se anula en a.

Es sabido que una función polinómica $p(z)$ tiene un cero de orden k en un punto $a \in \mathbb{C}$, si dicha función y todas sus derivadas, hasta la de orden $k-1$ inclusive, se anulan en a y la derivada de orden k no se anula en a.

Además, si una función polinómica $p(z)$ tiene un cero de orden k en un punto a entonces dicha función factoriza en la forma $p(z) = (z-a)^k q(z)$ donde $q(z)$ es una función polinómica que no se anula en a.

No es posible extender este concepto de *orden de un cero* a funciones reales no polinómicas.

Por ejemplo, la función real de variable real

$$f(x) = e^{-1/x^2} \qquad \text{si } x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Tanto f como todas sus derivadas se anulan en 0. ¿Debemos decir que f tiene un cero de *"orden infinito"* en $a = 0$?

Los ceros de una función polinómica son, evidentemente, un conjunto de puntos aislados en $\mathbb{C}$.

Consideremos la función

$$g(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \text{si } x \neq 0$$
$$g(0) = 0$$

Tenemos que g es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ y se anula en 0 y en todos los puntos de la sucesión $x_n = 1/n\pi$. Por tanto, en cualquier entorno de 0 hay infinitos ceros de g, es decir el conjunto de los ceros de g tiene a 0 como punto de acumulación.

En contraste con esta situación, vamos a ver que los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas. El resultado principal es el siguiente.

En contraste con esta situación, vamos a ver que los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas. El resultado principal es el siguiente.

Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Equivalen:

En contraste con esta situación, vamos a ver que los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas. El resultado principal es el siguiente.

Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Equivalen:

- El conjunto $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω, es decir, $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$.

En contraste con esta situación, vamos a ver que los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas. El resultado principal es el siguiente.

Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Equivalen:

- El conjunto $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω, es decir, $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$.
- Existe un punto $a \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

En contraste con esta situación, vamos a ver que los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas. El resultado principal es el siguiente.

Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Equivalen:

- El conjunto $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω, es decir, $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$.
- Existe un punto $a \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- f es la función constante cero en Ω.

Principio de identidad para funciones holomorfas

Si dos funciones holomorfas en un dominio Ω coinciden en un subconjunto de Ω que tiene algún punto de acumulación en Ω entonces dichas funciones coinciden en Ω.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ una función no idénticamente nula en Ω. Sea

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Entonces:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ una función no idénticamente nula en Ω. Sea

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Entonces:

- Todo punto de $Z(f)$ es un punto aislado de $Z(f)$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ una función no idénticamente nula en Ω . Sea

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Entonces:

- Todo punto de $Z(f)$ es un punto aislado de $Z(f)$.
- $Z(f)$ es numerable.

Orden de un cero

Sea f una función holomorfa y no idénticamente nula en un dominio Ω y supongamos que f tiene un cero en un punto $a \in \Omega$. Sea

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$$

Decimos entonces que f tiene en a un cero de orden k.

Caracterización del orden de un cero

Sea f una función holomorfa no idénticamente nula en un dominio Ω. Dado $a \in \Omega$, se verifica que f tiene en a un cero de orden k si, y sólo si, existe una función holomorfa en Ω, g, de forma que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^k g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Regla de L'Hôpital

Sean f ,g dos funciones holomorfas no idénticamente nulas en un dominio Ω. Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$ en un punto $a \in \Omega$. Entonces

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

En lo que sigue vamos a ver un procedimiento natural de extender analíticamente una función holomorfa dada que nos va a llevar a considerar funciones multiformes complejas muy generales.

En lo que sigue vamos a ver un procedimiento natural de extender analíticamente una función holomorfa dada que nos va a llevar a considerar funciones multiformes complejas muy generales.

Para empezar, considera la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ que tiene radio de convergencia 1 y define una función analítica en $D(0,1)$ dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad (|z| < 1)$$

En lo que sigue vamos a ver un procedimiento natural de extender analíticamente una función holomorfa dada que nos va a llevar a considerar funciones multiformes complejas muy generales.

Para empezar, considera la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ que tiene radio de convergencia 1 y define una función analítica en $D(0,1)$ dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad (|z| < 1)$$

La serie que define a f no converge para $|z| \geqslant 1$, es decir, la función así definida no tiene sentido para $z \notin D(0,1)$. Sin embargo, hay una función analítica definida en un dominio más grande que $D(0,1)$ y que extiende a f:

En lo que sigue vamos a ver un procedimiento natural de extender analíticamente una función holomorfa dada que nos va a llevar a considerar funciones multiformes complejas muy generales.

Para empezar, considera la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ que tiene radio de convergencia 1 y define una función analítica en $D(0,1)$ dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad (|z| < 1)$$

La serie que define a f no converge para $|z| \geqslant 1$, es decir, la función así definida no tiene sentido para $z \notin D(0,1)$. Sin embargo, hay una función analítica definida en un dominio más grande que $D(0,1)$ y que extiende a f:

La función $h(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

En lo que sigue vamos a ver un procedimiento natural de extender analíticamente una función holomorfa dada que nos va a llevar a considerar funciones multiformes complejas muy generales.

Para empezar, considera la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ que tiene radio de convergencia 1 y define una función analítica en $D(0,1)$ dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad (|z| < 1)$$

La serie que define a f no converge para $|z| \geqslant 1$, es decir, la función así definida no tiene sentido para $z \notin D(0,1)$. Sin embargo, hay una función analítica definida en un dominio más grande que $D(0,1)$ y que extiende a f:

La función $h(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

Dicha función es analítica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Claramente $D(0,1) \subset \Omega$ y $f(z) = h(z)\ \forall z \in D(0,1)$.

Consideremos ahora que tenemos una función analítica definida por una serie de potencias convergente en un cierto disco:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad (|z-a| < R)$$

Es natural preguntarse si dicha función puede prolongarse mas allá del disco donde está inicialmente definida *sin perder la analiticidad*.

Consideremos ahora que tenemos una función analítica definida por una serie de potencias convergente en un cierto disco:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \qquad (|z-a| < R)$$

Es natural preguntarse si dicha función puede prolongarse mas allá del disco donde está inicialmente definida *sin perder la analiticidad*.

La idea para extender f de forma analítica, es considerar un punto cualquiera $b \neq a$ en el disco $D(a, R)$ donde inicialmente está definida f y desarrollar f en serie de potencias centrada en b. De esta forma obtenemos una nueva serie de potencias $\sum b_n(z-b)^n$ con radio de convergencia $R_b > 0$ que define una función:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n, \qquad (|z-b| < R_b)$$

tal que $f_1(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a, R) \cap D(b, R_b)$.

Puede ocurrir que el disco $D(b, R_b)$ se salga fuera del disco $D(a, R)$. En tal caso, la función $F : D(a, R) \cup D(b, R_b) \to \mathbb{C}$ dada por:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{para } z \in D(a, R); \\ f_1(z), & \text{para } z \in D(b, R_b). \end{cases}$$

es una extensión analítica de f al dominio $D(a, R) \cup D(b, R_b)$. Lo más interesante es que esta es la *única* posible extensión de f a dicho dominio como se deduce fácilmente del principio de identidad. Podemos repetir ahora con f_1 este mismo proceso y así podríamos continuar indefinidamente (al menos en teoría). De esta forma lo que obtenemos es una colección de series de potencias con sus discos de convergencia, la unión de los cuales es un abierto en el que podemos definir una "función" que "prolonga analíticamente" a la función inicial. Puede ocurrir que la "función" así obtenida no sea una verdadera función sino una correspondencia, es decir, una función multiforme. Resulta así que *las funciones multiformes complejas aparecen de manera completamente natural en el proceso de prolongación analítica*.

Llamaremos **elemento de función** a un par (f, D) donde D es un disco abierto y $f \in \mathcal{H}(D)$.

Llamaremos **elemento de función** a un par (f, D) donde D es un disco abierto y $f \in \mathcal{H}(D)$.

Dos elementos de función (f_0, D_0), (f_1, D_1) se dice que son **prolongación analítica directa** uno de otro si $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$ y $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$. En tal caso escribiremos

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$$

Llamaremos **elemento de función** a un par (f, D) donde D es un disco abierto y $f \in \mathcal{H}(D)$.

Dos elementos de función (f_0, D_0), (f_1, D_1) se dice que son **prolongación analítica directa** uno de otro si $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ y $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$. En tal caso escribiremos

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$$

La relación así definida es claramente simétrica.

Llamaremos **elemento de función** a un par (f,D) donde D es un disco abierto y $f \in \mathcal{H}(D)$.

Dos elementos de función (f_0, D_0), (f_1, D_1) se dice que son **prolongación analítica directa** uno de otro si $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$ y $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$. En tal caso escribiremos

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$$

La relación así definida es claramente simétrica.

Es importante observar que si $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ y $(f_0, D_0) \sim (g_1, D_1)$ entonces $f_1 = g_1$. Pues se tiene que para todo $z \in D_0 \cap D_1$ es $f_1(z) = f_0(z) = g_1(z)$, y, por el principio de identidad, se sigue que $f_1(z) = g_1(z)$ para todo $z \in D_1$. En otras palabras, una prolongación analítica directa de un elemento de función está determinada de manera única por dicho elemento.

No siempre es posible prolongar un elemento dado de función. Por ejemplo, el elemento de función $(f, D(0,1))$ donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \qquad (|z| < 1)$$

no puede prolongarse fuera del disco unidad porque para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ se verifica que $\lim\limits_{\substack{r\to 1\\ r<1}} f(\rho\, e^{ir}) = \infty$, es decir, f tiene límite radial infinito en todo punto de la circunferencia unidad de la forma e^{ir} con $r \in \mathbb{Q}$ y tales puntos forman un conjunto denso en $C(0,1)^*$.

Una *cadena de discos* es un conjunto finito de discos abiertos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ tales que $D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

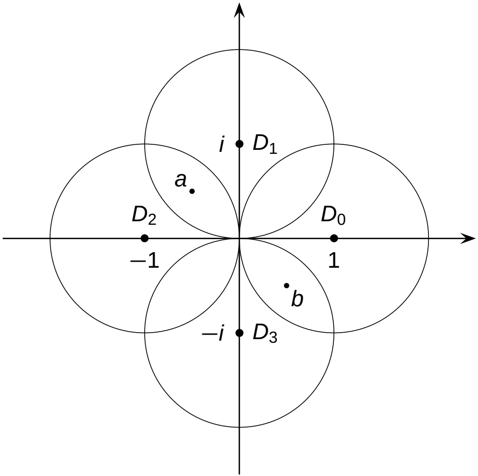
Una *cadena de discos* es un conjunto finito de discos abiertos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ tales que $D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

Dado un elemento de función (f_0, D_0), supongamos que hay elementos (f_k, D_k) tales que $(f_{k-1}, D_{k-1}) \sim (f_k, D_k)$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Entonces se dice que (f_n, D_n) es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de la cadena de discos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \dots, D_n\}$. Puesto que cada función f_k está determinada de manera única por f_{k-1}, deducimos que f_n está determinado de forma única por f_0 y $\mathcal{C}$.

Una *cadena de discos* es un conjunto finito de discos abiertos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$ tales que $D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dado un elemento de función (f_0, D_0), supongamos que hay elementos (f_k, D_k) tales que $(f_{k-1}, D_{k-1}) \sim (f_k, D_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces se dice que (f_n, D_n) es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de la cadena de discos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$. Puesto que cada función f_k está determinada de manera única por f_{k-1}, deducimos que f_n está determinado de forma única por f_0 y $\mathcal{C}$.

Es interesante observar que en este proceso de prolongación cada función f_k solamente está obligada a "guardar memoria" de la que le precede f_{k-1}, pero puede ocurrir que $D_0 \cap D_n \neq \emptyset$ y las funciones f_0 y f_n no coincidan en dicho conjunto. Esto se debe a que la relación "prolongación analítica directa" no es transitiva. El siguiente ejemplo es ilustrativo de lo que puede pasar.



i
D_1
a
D_2
D_0
-1
1
b
$-i$
D_3

Sea (f_0, D_0) un elemento de función, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva con punto inicial $\gamma(0)$ que es el centro del disco D_0. Supongamos que hay elementos de función (f_k, D_k) $0 \leqslant k \leqslant n$ y una partición $t_0 = 1 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ tal que $\gamma(1)$ es el centro de D_n y

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset D_{i-1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

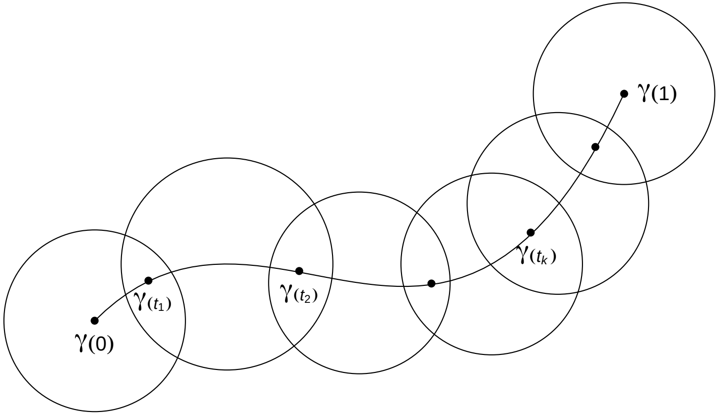
y tal que (f_n, D_n) es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de la cadena de discos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$, se dice entonces que (f_0, D_0) **puede prolongarse analíticamente a lo largo de** γ y que (f_n, D_n) es la **prolongación analítica de** (f_0, D_0) **a través de** γ**.**

Sea (f_0, D_0) un elemento de función, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva con punto inicial $\gamma(0)$ que es el centro del disco D_0. Supongamos que hay elementos de función (f_k, D_k) $0 \leqslant k \leqslant n$ y una partición $t_0 = 1 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ tal que $\gamma(1)$ es el centro de D_n y

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset D_{i-1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

y tal que (f_n, D_n) es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de la cadena de discos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$, se dice entonces que (f_0, D_0) **puede prolongarse analíticamente a lo largo de** γ y que (f_n, D_n) es la **prolongación analítica de** (f_0, D_0) **a través de** γ**.**

Aunque en la definición anterior hay muchos datos, lo importante es que la prolongación analítica a lo largo de una curva γ está determinada de forma única por el elemento de función inicial (f_0, D_0) y la propia curva.


γ(1)
γ(t_k)
γ(t_1)
γ(t_2)
γ(0)

Una **función analítica en el sentido de Weierstrass** es la colección de todos los elementos de función que pueden obtenerse por prolongación analítica a partir de un elemento de función dado.

Una **función analítica en el sentido de Weierstrass** es la colección de todos los elementos de función que pueden obtenerse por prolongación analítica a partir de un elemento de función dado.

Si $\mathscr{F}$ es una función analítica en sentido de Weierstrass, su dominio es el abierto Ω formado por la unión de todos los discos de convergencia de sus elementos de función (puede probarse que Ω es un dominio).

Una **función analítica en el sentido de Weierstrass** es la colección de todos los elementos de función que pueden obtenerse por prolongación analítica a partir de un elemento de función dado.

Si $\mathscr{F}$ es una función analítica en sentido de Weierstrass, su dominio es el abierto Ω formado por la unión de todos los discos de convergencia de sus elementos de función (puede probarse que Ω es un dominio).

Para cada punto $z \in \Omega$ se define $\mathscr{F}(z)$ como el conjunto de valores que toman en z los elementos de función de $\mathscr{F}$ cuyo disco de convergencia contiene a z. Por tanto, una función analítica en el sentido de Weierstrass es una "correspondencia analítica". Vamos a darle la vuelta a esta situación y a precisar la expresión "correspondencia analítica".

Sea $\mathscr{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathscr{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

Sea $\mathscr{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathscr{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

a) Para cada punto $z \in \Omega$ hay un un disco, D_z, centrado en z y un elemento de función (f, D_z) que es una rama holomorfa de $\mathscr{F}$ (diremos que estos elementos *pertenecen* a $\mathscr{F}$ y que z es el *centro* del elemento (f, D_z)).

Sea $\mathscr{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathscr{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

a) Para cada punto $z \in \Omega$ hay un un disco, D_z, centrado en z y un elemento de función (f, D_z) que es una rama holomorfa de $\mathscr{F}$ (diremos que estos elementos *pertenecen* a $\mathscr{F}$ y que z es el *centro* del elemento (f, D_z)).
b) Dos elementos cualesquiera de $\mathscr{F}$ son prolongación analítica uno de otro a través de alguna curva en Ω.

Sea $\mathcal{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

a) Para cada punto $z \in \Omega$ hay un un disco, D_z, centrado en z y un elemento de función (f, D_z) que es una rama holomorfa de $\mathcal{F}$ (diremos que estos elementos *pertenecen* a $\mathcal{F}$ y que z es el *centro* del elemento (f, D_z)).

b) Dos elementos cualesquiera de $\mathcal{F}$ son prolongación analítica uno de otro a través de alguna curva en Ω.

c) Todo elemento de función que puede ser obtenido por prolongación analítica de un elemento de $\mathcal{F}$ es también un elemento de $\mathcal{F}$.

Sea $\mathscr{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathscr{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

a) Para cada punto $z \in \Omega$ hay un un disco, D_z, centrado en z y un elemento de función (f, D_z) que es una rama holomorfa de $\mathscr{F}$ (diremos que estos elementos *pertenecen* a $\mathscr{F}$ y que z es el *centro* del elemento (f, D_z)).
b) Dos elementos cualesquiera de $\mathscr{F}$ son prolongación analítica uno de otro a través de alguna curva en Ω.
c) Todo elemento de función que puede ser obtenido por prolongación analítica de un elemento de $\mathscr{F}$ es también un elemento de $\mathscr{F}$.
d) Todo elemento (f, D_z) de $\mathscr{F}$ puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva contenida en Ω cuyo punto inicial sea z.

Sea $\mathcal{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

a) Para cada punto $z \in \Omega$ hay un un disco, D_z, centrado en z y un elemento de función (f, D_z) que es una rama holomorfa de $\mathcal{F}$ (diremos que estos elementos *pertenecen* a $\mathcal{F}$ y que z es el *centro* del elemento (f, D_z)).

b) Dos elementos cualesquiera de $\mathcal{F}$ son prolongación analítica uno de otro a través de alguna curva en Ω.

c) Todo elemento de función que puede ser obtenido por prolongación analítica de un elemento de $\mathcal{F}$ es también un elemento de $\mathcal{F}$.

d) Todo elemento (f, D_z) de $\mathcal{F}$ puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva contenida en Ω cuyo punto inicial sea z.

Sea $\mathscr{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathscr{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

a) Para cada punto $z \in \Omega$ hay un un disco, D_z, centrado en z y un elemento de función (f, D_z) que es una rama holomorfa de $\mathscr{F}$ (diremos que estos elementos *pertenecen* a $\mathscr{F}$ y que z es el *centro* del elemento (f, D_z)).
b) Dos elementos cualesquiera de $\mathscr{F}$ son prolongación analítica uno de otro a través de alguna curva en Ω.
c) Todo elemento de función que puede ser obtenido por prolongación analítica de un elemento de $\mathscr{F}$ es también un elemento de $\mathscr{F}$.
d) Todo elemento (f, D_z) de $\mathscr{F}$ puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva contenida en Ω cuyo punto inicial sea z.

Con esta definición las correspondencias $\mathscr{F}(z) = \mathrm{Log}(z)$ y $\mathscr{G}(z) = [z^{1/n}]$ son holomorfas en $\mathbb{C}^*$.

Sea $\mathscr{F}$ una correspondencia holomorfa cuyo abierto de definición es Ω.

Sea $\mathscr{F}$ una correspondencia holomorfa cuyo abierto de definición es Ω.

- Se dice que un punto a es un **punto singular aislado** de $\mathscr{F}$, si hay un disco $D(a,r)$ tal que $D(a,r)\setminus\{a\}\subset\Omega$.

Sea $\mathcal{F}$ una correspondencia holomorfa cuyo abierto de definición es Ω.

- Se dice que un punto a es un **punto singular aislado** de $\mathcal{F}$, si hay un disco $D(a,r)$ tal que $D(a,r)\setminus\{a\}\subset\Omega$.

- Un punto singular aislado, a, se dice que es un **punto de ramificación** de orden $n-1$ de $\mathcal{F}$ si la prolongación analítica de cualquier elemento de $\mathcal{F}$ a lo largo de una curva del tipo $\gamma(t)=a+\rho\,\mathrm{e}^{i2\pi nt}$ donde $t\in[0,1]$ termina en el mismo elemento de partida y n es el menor número natural con dicha propiedad. Si la prolongación analítica a lo largo de curvas del tipo $\gamma(t)=a+\rho\,\mathrm{e}^{i2\pi nt}$ donde $t\in[0,1]$ no conduce nunca al mismo elemento de partida se dice que a es un punto de ramificación logarítmico o de orden infinito de $\mathcal{F}$.

Sea $\mathscr{F}$ una correspondencia holomorfa cuyo abierto de definición es Ω.

- Se dice que un punto a es un **punto singular aislado** de $\mathscr{F}$, si hay un disco $D(a,r)$ tal que $D(a,r)\setminus\{a\}\subset\Omega$.

- Un punto singular aislado, a, se dice que es un **punto de ramificación** de orden $n-1$ de $\mathscr{F}$ si la prolongación analítica de cualquier elemento de $\mathscr{F}$ a lo largo de una curva del tipo $\gamma(t)=a+\rho\,e^{i2\pi nt}$ donde $t\in[0,1]$ termina en el mismo elemento de partida y n es el menor número natural con dicha propiedad. Si la prolongación analítica a lo largo de curvas del tipo $\gamma(t)=a+\rho\,e^{i2\pi nt}$ donde $t\in[0,1]$ no conduce nunca al mismo elemento de partida se dice que a es un punto de ramificación logarítmico o de orden infinito de $\mathscr{F}$.

- Se dice que ∞ es un punto de ramificación de $\mathscr{F}$ si 0 es un punto de ramificación de $\mathscr{G}$ donde $\mathscr{G}(z)=\mathscr{F}(1/z)$

Principio de reflexión de Schwarz

Sea $\Omega \subset$ un dominio contenido en el semiplano superior tal que $Fr(\Omega) \cap \mathbb{R} = I$ es un intervalo abierto y definamos $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$. Sea f una función holomorfa en Ω y continua en $\Omega \cup I$ que toma valores reales en I. Entonces la función $F : \Omega \cup I \cup \Omega^* \to \mathbb{C}$ definida por:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in \Omega \cup I; \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{si } z \in \Omega^*. \end{cases}$$

es holomorfa.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$. Entonces

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$. Entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + R\,\mathrm{e}^{i\,t})\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(igualdad de la media)}$$

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$. Entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + R\,\mathrm{e}^{i\,t})\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(igualdad de la media)}$$

esto es, el valor que toma f en el centro de una circunferencia es la media de los valores que toma en la circunferencia.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. Entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + R\,\mathrm{e}^{i\,t})\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(igualdad de la media)}$$

esto es, el valor que toma f en el centro de una circunferencia es la media de los valores que toma en la circunferencia.

Además

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + Re^{i\,t})|\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(desigualdad de la media)}$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en Ω se dice que es *subarmónica* en Ω si verifica la desigualdad

$$\varphi(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a + Re^{i\,t})\,\mathrm{d}t$$

siempre que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en Ω se dice que es *subarmónica* en Ω si verifica la desigualdad

$$\varphi(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a + Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

siempre que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$.

Según acabamos de ver, el módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.

Principio del máximo para funciones subarmónicas

Una función subarmónica en un dominio que alcanza un máximo absoluto es constante.

Una función subarmónica en un dominio que alcanza un máximo absoluto es constante.

Sea Ω un dominio acotado, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y subarmónica en Ω. Entonces

$$\max\{\varphi(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{\varphi(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

esto es, el máximo de φ se alcanza en la frontera de Ω.

Principio del módulo máximo

Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un máximo relativo es constante.

Principio del módulo máximo

Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un máximo relativo es constante.

Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un mínimo relativo distinto de cero es constante.

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces se verifica:

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces se verifica:

- $|f|$ alcanza su máximo en la frontera de Ω, es decir,

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr} \Omega\}$$

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces se verifica:

- $|f|$ alcanza su máximo en la frontera de Ω, es decir,

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

- Si f no se anula en Ω entonces el mínimo de $|f|$ también se alcanza en la frontera, es decir,

$$\min\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \min\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces se verifica:

- $|f|$ alcanza su máximo en la frontera de Ω, es decir,

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

- Si f no se anula en Ω entonces el mínimo de $|f|$ también se alcanza en la frontera, es decir,

$$\min\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \min\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

- Si f no es constante en Ω y $|f|$ es constante en $\operatorname{Fr}\Omega$ entonces f se anula en algún punto de Ω.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω. Se dice que φ es armónica en Ω si para todo $(x, y) \in \Omega$ se verifica

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω. Se dice que φ es armónica en Ω si para todo $(x, y) \in \Omega$ se verifica

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Representaremos por $\mathcal{A}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones armónicas en Ω.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω. Se dice que φ es armónica en Ω si para todo $(x, y) \in \Omega$ se verifica

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Representaremos por $\mathcal{A}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones

armónicas en Ω.

Observa que aunque los nombres “subarmónica” y “armónica” suenan parecidos, los conceptos que definen son totalmente distintos, puesto que ser “subarmónica” se define por una propiedad global que involucra un promedio integral, mientras que ser “armónica” es una propiedad local pues viene expresada por medio de derivadas parciales.

Relación entre funciones armónicas y funciones holomorfas

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y llamemos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Entonces u, v son armónicas en Ω y además $u, v \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.

Relación entre funciones armónicas y funciones holomorfas

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y llamemos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Entonces u, v son armónicas en Ω y además $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Sea u una función armónica en Ω. Entonces la función

$$f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad x+iy \in \Omega$$

es holomorfa en Ω .

Relación entre funciones armónicas y funciones holomorfas

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y llamemos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Entonces u, v son armónicas en Ω y además $u, v \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.

Sea u una función armónica en Ω. Entonces la función

$$f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad x+iy \in \Omega$$

es holomorfa en Ω .

En consecuencia toda función armónica es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$.

Acabamos de probar que la parte real de cualquier función holomorfa es una función armónica.

Acabamos de probar que la parte real de cualquier función holomorfa es una función armónica.

¿Es cierto el recíproco? Es decir, si tenemos una función armónica φ en un abierto Ω ¿existe una función f holomorfa en Ω tal que φ sea la parte real de f?

Acabamos de probar que la parte real de cualquier función holomorfa es una función armónica.

¿Es cierto el recíproco? Es decir, si tenemos una función armónica φ en un abierto Ω ¿existe una función f holomorfa en Ω tal que φ sea la parte real de f?

En general esto no va a ser cierto y el que lo sea va a depender de las propiedades topológicas del abierto Ω. El siguiente resultado es una primera respuesta a este problema.

Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y supongamos que toda función holomorfa en Ω tiene primitiva en Ω. Entonces toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω (la cual es única salvo una constante aditiva).

Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y supongamos que toda función holomorfa en Ω tiene primitiva en Ω. Entonces toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω (la cual es única salvo una constante aditiva).

Toda función armónica en un dominio estrellado es la parte real de una función holomorfa en dicho dominio.

Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y supongamos que toda función holomorfa en Ω tiene primitiva en Ω. Entonces toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω (la cual es única salvo una constante aditiva).

Toda función armónica en un dominio estrellado es la parte real de una función holomorfa en dicho dominio.

Una función u es armónica en un abierto Ω si, y sólo si, para todo disco $D(a,R)$ contenido en Ω existe una función holomorfa en dicho disco, $f_a \in \mathcal{H}(D(a,R))$, tal que $u(x,y) = \operatorname{Re} f_a(x+iy)$ para todo $x+iy \in D(a,R)$.

Igualdad de la media para funciones armónicas.

Las funciones armónicas verifican la igualdad de la media. Esto es, dados $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$ entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, \mathrm{d}t$$

Igualdad de la media para funciones armónicas.

Las funciones armónicas verifican la igualdad de la media. Esto es, dados $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$ entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{i\,t})\,\mathrm{d}t$$

Principio de extremo para funciones armónicas.

Sea u una función armónica en un dominio Ω y supongamos que u alcanza en algún punto de Ω un extremo relativo. Entonces u es constante en Ω.

Principio de identidad para funciones armónicas

Sean u y v dos funciones armónicas definidas sobre un dominio Ω tales que el conjunto donde coinciden tiene interior no vacío. Entonces ambas funciones coinciden sobre todo Ω.

Principio de identidad para funciones armónicas

Sean u y v dos funciones armónicas definidas sobre un dominio Ω tales que el conjunto donde coinciden tiene interior no vacío. Entonces ambas funciones coinciden sobre todo Ω.

Sea Ω un dominio acotado, u una función armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces u alcanza el máximo y el mínimo en la frontera de Ω:

$$\max\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$
$$\min\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \min\{u(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

Principio de identidad para funciones armónicas

Sean u y v dos funciones armónicas definidas sobre un dominio Ω tales que el conjunto donde coinciden tiene interior no vacío. Entonces ambas funciones coinciden sobre todo Ω.

Sea Ω un dominio acotado, u una función armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces u alcanza el máximo y el mínimo en la frontera de Ω:

$$\max\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$
$$\min\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \min\{u(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

En consecuencia si v es armónica en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ y coincide con u en $\operatorname{Fr}\Omega$, entonces v coincide con u en todo Ω.

Teorema de la aplicación abierta.

Una función holomorfa y no constante en un dominio es una aplicación abierta.

Teorema de la aplicación abierta.

Una función holomorfa y no constante en un dominio es una aplicación abierta.

Teorema de inversión local.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω en el que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un abierto $U \subset \Omega$ que contiene al punto a verificándose que:

Teorema de la aplicación abierta.

Una función holomorfa y no constante en un dominio es una aplicación abierta.

Teorema de inversión local.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω en el que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un abierto $U \subset \Omega$ que contiene al punto a verificándose que:

i) f es inyectiva en U y la imagen $f(U) = V$ es abierto.

Teorema de la aplicación abierta.

Una función holomorfa y no constante en un dominio es una aplicación abierta.

Teorema de inversión local.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω en el que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un abierto $U \subset \Omega$ que contiene al punto a verificándose que:

i) f es inyectiva en U y la imagen $f(U) = V$ es abierto.
ii) La función $\varphi = (f|_U)^{-1} : V \to \mathbb{C}$ es holomorfa en V siendo $\varphi'\big(f(z)\big)f'(z) = 1$ para todo $z \in U$.

Sea Ω un dominio, a un punto de Ω y f una función holomorfa y no constante en Ω. Sea m el orden del cero que tiene en el punto a la función $z \mapsto f(z) - f(a)$. Entonces existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y para todo $w \in D\big(f(a), \varepsilon\big) \setminus \{f(a)\}$ se verifica que hay exactamente m puntos $z_k \in D(a, \delta)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, tales que $f(z_k) = w$.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y a un punto de Ω. Equivalen:

a) $f'(a) \neq 0$

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y a un punto de Ω. Equivalen:

a) $f'(a) \neq 0$

b) f es inyectiva en un entorno de a.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y a un punto de Ω. Equivalen:

a) $f'(a) \neq 0$

b) f es inyectiva en un entorno de a.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y a un punto de Ω. Equivalen:

a) $f'(a) \neq 0$

b) f es inyectiva en un entorno de a.

Teorema de inversión global.

Sea f una función holomorfa e inyectiva en Ω. Entonces f es una biyección biholomorfa de Ω sobre $f(\Omega)$.